Lógica para Computação	**Segundo Semestre, 2014**

Aula 4: Consequência Lógica e Equivalência Lógica

DAINF-UTFPR — Prof. Ricardo Dutra da Silva

Definição 4.1. *Em lógica proposicional dizemos que uma fórmula B é consequência lógica de uma fórmula A, se toda valoração I que satisfaz A também satisfaz B. A consequência lógica é representada por $A \vDash B$. Podemos também dizer que A implica logicamente B.*

Tabelas-verdade podem ser usadas para verificar a consequência lógica.

Definição 4.2. *Para verificar se $A \vDash B$ é verdadeira, podemos seguir os passos:*

1. *Construímos uma tabela-verdade que contenha em suas colunas a união das subfórmulas de A e B.*

2. *Verificamos para toda linha da tabela em que $I(A) = 1$, se $I(B) = 1$. Caso para alguma linha $I(A) = 1$ e $I(B) = 0$, a consequência lógica não é verificada.*

Exemplo 4.1

Verifique se $p \vee q \rightarrow r \vDash p \rightarrow r$.

linha	p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1
5	1	0	0	1	0	0
6	1	0	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Analisamos as duas últimas colunas, que correspondem às fórmulas da questão. As valorações que satisfazem a fórmula $p \vee q \rightarrow r$ (última coluna) são as das linhas 1, 2, 4, 6 e 8. A Definição 4.1 enuncia que toda valoração de $p \vee q \rightarrow r$ que a torna verdadeira também deve tornar $p \rightarrow r$ verdadeira, ou seja, as valorações das linhas 1, 2, 4, 6 e 8 *também devem tornar $p \to r$ verdadeira. E esse é justamente o caso. Portanto, $p \to r$ é uma consequência lógica de $p \lor q \to r$.*

Exemplo 4.2

Verifique se $p \land q \to r \vDash p \to r$.

linha	p	q	r	$p \land q$	$p \to r$	$p \land q \to r$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	1
5	1	0	0	0	0	1
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Temos que as linhas 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8 satisfazem a fórmula $p \land q \to r$. As linhas 1, 2, 3, 4, 6 e 8 satisfazem a fórmula $p \to r$. No entanto, a linha 5 falsifica $p \to r$, não respeitando a definição de consequência lógica. Portanto, $p \to r$ não é consequência lógica de $p \land q \to r$.

Um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ pode implicar logicamente uma fórmula A. Tal conjunto de fórmulas Γ é chamado de teoria.

Definição 4.3. *Uma fórmula A é consequência lógica de uma teoria Γ, $\Gamma \vDash A$, se toda valoração I que satisfaz todas as fórmulas de Γ também satisfaz A.*

Definição 4.4. *Para verificar se $\Gamma \vDash A$ é verdadeira, podemos seguir os passos:*

1. *Construímos uma tabela-verdade que contenha em suas colunas a união das subfórmulas de $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ e de A.*

2. *Verificamos para toda linha da tabela em que $I(A_1) = I(A_2) = \ldots = I(A_n) = 1$, se $I(A) = 1$. Caso seja verdade, temos uma consequência lógica.*

Exemplo 4.3

Seja $\Gamma = \{p \to q, p\}$, verifique se q é consequência lógica de Γ.
Queremos saber se $p \to q, p \vDash q$. Construímos a tabela-verdade.

linha	p	q	$p \to q$
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	0
4	1	1	1

A única valoração que torna todas as fórmulas da teoria Γ verdadeira é a da linha 4. A fórmula A também é verdadeira para esta valoração. Portanto, q é uma consequência lógica das fórmulas $\Gamma = \{p \to q, p\}$.

Teorema 4.1 (Teorema da Dedução)**.** Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então,

$$\Gamma, A \vDash B \text{ se e somente se } \Gamma \vDash A \to B.$$

Demonstração. Assuma a hipótese $\Gamma, A \vDash B$. Queremos provar que $\Gamma \vDash A \to B$. Pela definição de consequência lógica, temos que analisar qual a interpretação de $A \to B$ quando $I(\Gamma) = 1$. Suponha inicialmente que $I(A) = 1$. Pela hipótese, $I(B) = 1$ e, portanto, $I(A \to B) = 1$. Agora suponha $I(A) = 0$. Nesse caso, independentemente da valoração de B, a definição da implicação diz que $I(A \to B) = 1$. Como essas são todas as possibilidades de valoração, concluímos que $\Gamma \vDash A \to B$.

Assuma agora a hipótese $\Gamma \vDash A \to B$. Queremos provar que $\Gamma, A \vDash B$. Precisamos analisar as possibilidades de valoração para B quando $I(\Gamma) = 1$ e $I(A) = 1$. Se $I(B) = 1$, trivialmente temos a consequência lógica. Vamos assumir então $I(B) = 0$. Como temos $I(A) = 1$, então $I(A \to B) = 0$, pela definição da implicação. No entanto, a hipótese afirma que $I(A \to B) = 1$. Isso é uma contradição. Logo $I(B)$ tem que ser 1. Com isso concluímos que $\Gamma, A \vDash B$. $\square$

Definição 4.5. *Duas fórmulas A e B são logicamente equivalentes, $A \equiv B$, se*

$$A \vDash B \text{ e } B \vDash A.$$

Note que a Definição 4.5 diz que, dada uma valoração qualquer, então $I(A) = I(B)$.

Definição 4.6. *Para verificar se $\Gamma \equiv B$ é verdadeira, podemos seguir os passos:*

1. *Construímos uma tabela-verdade que contenha em suas colunas a união das*

subfórmulas de A e de B.

2. *Verificamos para toda linha da tabela se $I(A) = I(B)$.*

Exemplo 4.4

Verifique se $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

linha	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1
3	1	0	0	1	0	0
4	1	1	0	0	1	1

A tabela mostra que sempre que $I(A) = 1$, $I(B) = 1$. Também, sempre que $I(A) = 0$, $I(B) = 0$. Temos uma equivalência lógica.

Exemplo 4.5

Algumas equivalências lógicas são bastante importantes. Entre as principais, podemos listar:

- $\neg\neg A \equiv A$ *(eliminação da dupla negação)*
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$ *(definição de $\to$ em termos de $\vee$ e $\neg$)*
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ *(lei de De Morgan)*
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ *(lei de De Morgan)*
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$)*
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$).*

Suponha que escolhamos qualquer um dos conectivos $\{\wedge, \vee, \to\}$ mais o conectivo $\neg$. Por exemplo, escolhemos $\vee$ entre os três primeiros. Na lógica proposicional sempre podemos escrever os conectivos $\wedge$ e $\to$ usando apenas $\vee$ e $\neg$. Em outras, palavras existem equivalências que redefinem os operadores $\wedge$ e $\to$ usando apenas $\vee$ e $\neg$. Podemos, de fato, escolher qualquer um dos conectivos $\{\wedge, \vee, \to\}$ e, juntamente com o conectivo $\neg$, encontrar equivalências para os outros dois conectivos.

Exemplo 4.6

Vamos redefinir $\vee$ e $\rightarrow$ em função de $\wedge$ e $\neg$.

As equivalências do Exemplo 4.5 são bastante úteis quando queremos realizar esse tipo de redefinição. Vamos redefinir $\vee$. Usamos a equivalência de eliminação da dupla negação para, contrariamente, incluir a dupla negação. Isso é possível já que são equivalências.

$$A \vee B \equiv \neg\neg(A \vee B)$$

Agora, usando a lei de De Morgan, temos

$$\neg\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

Para redefinir a implicação, inicialmente podemos usar a equivalência de $\rightarrow$ usando $\vee$ e $\neg$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B.$$

Em seguida, incluímos a dupla negação

$$\neg A \vee B \equiv \neg\neg(\neg A \vee B).$$

Por fim, usamos a lei de De Morgan

$$\neg\neg(\neg A \vee B) \equiv \neg(A \wedge \neg B).$$

Exercício 4.1. *Usando tabelas-verdade, prove ou refute as consequências lógicas a seguir:*

a) $\neg\neg p \vDash p$

b) $\neg q \rightarrow \neg p \vDash p \rightarrow q$

c) $\neg p \rightarrow \neg q \vDash p \rightarrow q$

d) $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q \vee r$

e) $p \to q \vdash p \to q \land r$

f) $\neg(p \lor q) \vDash \neg p \lor \neg q$

g) $\neg(p \lor q) \vDash \neg p \land \neg q$

Exercício 4.2. *Usando tabelas-verdade, prove ou refute as equivalências lógicas a seguir:*

a) $\neg\neg p \equiv p$

b) $p \to q \equiv \neg p \lor q$

c) $\neg p \land \neg q \equiv \neg(p \lor q)$

d) $\neg\neg(p \land q) \equiv \neg(\neg p \lor \neg q)$

e) $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

f) $p \lor (q \land r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

g) $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

Exercício 4.3. *O Exemplo 4.6 redefiniu os conectivos* $\lor$ *e* $\to$ *usando* $\land$ *e* $\neg$*. Redefina:*

a) $\land$ *e* $\to$ *usando* $\lor$ *e* $\neg$*.*

b) $\land$ *e* $\lor$ *usando* $\to$ *e* $\neg$*.*

Exercício 4.4. *O conectivo de bi-implicação* $A \leftrightarrow B$ *pode ser definido pela equivalência lógica* $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$*. Para quais valorações de* A *e* B *o conectivo é verdadeiro?*